МЕТОД ОБРАЩЕНИЯ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ СИСТЕМАМИ

Сумин В.И.

Октябрь 2020

1. Обозначения

$\Pi \subset \mathbf{R}^n$ – измеримое, ограниченное,

$t = \{t^1, \dots, t^n\} \in \Pi$;

$\Sigma = \Sigma(\Pi)$ – σ-алгебра измеримых подмножеств Π;

T — некоторая часть Σ;

P_H – оператор умножения на $\chi_H(t) \equiv \{1,\ t \in H;\ 0,\ t \in \Pi \backslash H\}$;

B – банахово пространство;

ЛО (ЛОО) – линейный (линейный огранич.) оператор;

$\mathcal{L}(B_1, B_2)$ – пр-во ЛОО $B_1 \to B_2$;

$\rho(G) = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left\|G^k\right\|}$, где $G : B \to B$ – ЛОО;

УНКЗ – управляемая начально-краевая задача;

УСГР – устойчивость существования глобальных решений.

В.И.Сумин: Канд. дисс. (1975), ДАН СССР (1989):

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \qquad t \in \Pi \subset \mathbf{R}^n, \qquad (\star)$$

$f(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$;
$v(\cdot) \in \mathcal{D} \subset L_1^s$ – управление;
$A \in \mathcal{L}(L_p^m, L_q^l)$;
$A \in V(T)$ для некоторой системы $T \subset \Sigma(\Pi)$.

Определение [В.И.Сумин // ДАН СССР. 1989. Т.305. 5]

$\{A$ — вольтерров на системе $T\} \equiv \{A \in V(T)\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left\{ A[z]\Big|_H \text{ не зависит от } z\Big|_{\Pi \setminus H} \;\; \forall\, H \in T \right\}$

$$z(t) = \theta(t) + A\big[g(., z(.), v(.))\big](t), \qquad t \in \Pi \subset \mathbf{R}^n \qquad (\star\star)$$

---

2. ВФУ в теории оптимального управления

$(\star)$, $(\star\star)$ – удобная для теории оптимального управления форма записи УНКЗ (унификация результатов, уяснение связей и закономерностей)

Полученные результаты:

форма $(\star)$: а) условия УСГР,
б) НУО,
в) особые управления,
г) преодоление сингулярности
(сингулярность в смысле Ж.-Л.Лионса),
д) обоснование численных методов ОУ,
е) выпуклость мн-в глобальной разрешимости,
ж) поточечная управляемость,

форма $(\star\star)$: а), б), г), д), ж),
з) расширение задач ОУ
и) вольтерровы функционально-операторные игры

Пример 1. **Задача Коши для ОДУ**

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{x} = g\big(t, x(t), v(t)\big), & t \in \Pi = [a, b] \subset \mathbf{R}; \\ x(c) = w, & a \leq c \leq b \end{array}\right\} \qquad (1)$$

$$x(t) = w + \int\limits_c^t z(\xi)\, d\xi \equiv w + A[z](t), \quad t \in \Pi \qquad (2)$$

$$\Big\{x(.) \in AC_p(\Pi),\ x(c) = w\Big\} \underset{\text{вз.-одн.}}{\overset{(2)}{\leftrightarrow}} \big\{z(.) \in L_p(\Pi)\big\}$$

$$\Big\{(1),\ \text{реш. из } W(\Pi) \equiv AC_p(\Pi)\Big\} \sim \text{ ур. } (\star) \text{ над } L_p(\Pi):$$

$$z(t) = g\big(t, w + A[z](t), v(t)\big), \quad t \in \Pi, \qquad (3)$$

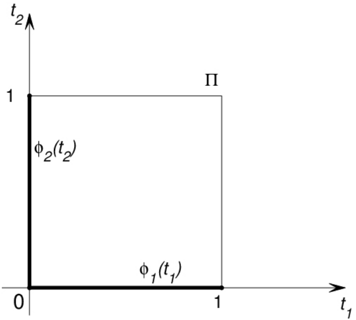
$$A \in V(T), \quad T = \Big\{H = [\alpha, \beta] \subset \Pi: \ c \in [\alpha, \beta]\Big\}$$

Пример 2. **Задача Гурса–Дарбу**

$$x''_{t^1t^2}(t) = g(t, x(t), x'_{t^1}(t), x'_{t^2}(t), v(t)), t \in \Pi \equiv [0,1] \times [0,1], \quad (1)$$

$$x(t^1, 0) = \varphi_1(t^1), \quad x(0, t^2) = \varphi_2(t^2), \quad t^1, t^2 \in [0,1], \quad (2)$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \quad (3)$$



φ_1, $\varphi_2 \in AC_\infty[0,1]$
g – условия Каратеодори, огранич. на любом огранич. мн-ве.

Решения из
$AC_\infty(\Pi) \equiv$
$\equiv \{x \in C(\Pi) \colon x'_{t^1}, x'_{t^2}, x''_{t^1t^2} \in L_\infty(\Pi)\}$.

$$\Big\{x(.) \in AC_\infty(\Pi),\ (2),(3)\Big\} \underset{\text{вз.-одн.}}{\overset{(4)}{\leftrightarrow}} \big\{z(.) \in L_\infty(\Pi)\big\}$$

$$x(t) = \varphi_1(t^1) + \varphi_2(t^2) + \int_0^{t^1}\int_0^{t^2} z(\xi)d\xi,\ \ t \in \Pi \tag{4}$$

Поэтому задача (1)-(3) эквивалентна уравнению $(\star)$ над $L_\infty(\Pi)$:

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)) \equiv$$

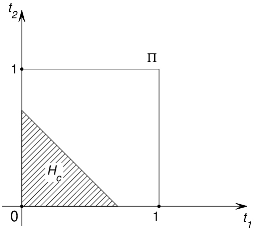
$$\equiv g\left(t,\ \varphi_1(t^1) + \varphi_2(t^2) + A_0[z],\ \varphi_1'(t^1) + A_1[z],\ \varphi_2'(t^2) + A_2[z],\ v(t)\right),$$

$$t \in \Pi, \qquad z(.) \in L_\infty(\Pi) \tag{5}$$

$$A[z](t) \equiv \{A_0[z](t), A_1[z](t), A_2[z](t)\},\ \ t \in \Pi,\ \ z \in L_\infty^m,$$

$$A_0[z](t) \equiv \int_0^{t^1}\int_0^{t^2} z(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2,\ \ A_1[z](t) \equiv \int_0^{t^2} z(t^1,\xi)d\xi,$$

$$A_2[z](t) \equiv \int_0^{t^1} z(\xi,t^2)d\xi,\ \ t \in \Pi.$$



$$A \in \mathfrak{L}\left(L_\infty, L_\infty^3\right),$$
$$A \in V(T),\ T = \Big\{H_c:\ \ c \in [0,2]\Big\},$$
$$H_c = \Big\{t \in \Pi:\ \ t^1 + t^2 \le c\Big\}$$

Пример 3. **Первая НКЗ для полулинейного параболического уравнения**

$$\left.\begin{array}{lll} \mathcal{L}[x](t) \equiv x'_{t^{n+1}} - \sum\limits_{i,j}\left(a_{ij}(t)x'_{t^j}\right)'_{t^i} = g(t,x,v(t)), \ t \in \Pi; & & \\ (\text{Нач.Усл.}) \qquad x(\widehat{t},0) = w(\widehat{t}), & \widehat{t} \in Q; & \\ (\text{Кр. Усл.}) \qquad x(\widehat{t},t^{n+1})\Big|_{\widehat{t}\in\partial Q} = 0, & 0 < t^{n+1} < \sigma, & \end{array}\right\} \qquad (1)$$

$\Pi \equiv Q \times (0,\sigma)$,
$Q \subset \mathbf{R}^n$ – огр. односв. обл., $\partial Q \in C^2$,
$t = \{\widehat{t}, t^{n+1}\}$, $\widehat{t} = \{t^1,\ldots,t^n\}$,
$w \in L_\infty(Q)$,
$a_{ij} \in L_\infty(\Pi)$ – усл. равномерной параболичности,
g – усл. Каратеодори, огранич. на любом огранич. мн-ве,
$v \in L_\infty(\Pi)$ – управление.
Решения (1) – ограниченные обобщенные из $V_2^{1,0}(\Pi)$.

<u>Вспомогательная задача</u> ($z \in L_\infty(\Pi)$)

$$\left.\begin{array}{lll} \mathcal{L}[x](t) = z(t), \;\; t \in \Pi; & & \\ (\text{НачУсл}) & x(\widehat{t},0) = w(\widehat{t}), & \widehat{t} \in Q; \\ (\text{Кр Усл}) & x(\widehat{t}, t^{n+1})\Big|_{\widehat{t}\in\partial Q} = 0, & 0 < t^{n+1} < \sigma. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$x(.) \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi)$ – решение (2), если она ограничена и для п.в. $\xi \in [0,\sigma]$

$$\int\limits_0^\xi dt^{n+1} \int\limits_Q \left\{ -x\eta'_{t^{n+1}} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x'_{t^j}\eta'_{t^i} - \eta z \right\} d\hat{t} +$$

$$+ \int\limits_Q x(\hat{t},\xi)\eta(\hat{t},\xi)d\hat{t} - \int\limits_Q w(\hat{t})\eta(\hat{t},0)d\hat{t} = 0, \quad \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(\Pi).$$

Решение НКЗ (2) $\exists$ и единственно $\forall z \in L_\infty(\Pi)$.

Решение вспомогательной НКЗ (2) задается формулой

$$x(t) = \Theta[w](t) + A[z](t), \;\; t \in \Pi, \tag{3}$$

$\Theta[w](.)$ – решение (2) при $z \equiv 0$,

$A \in \mathcal{L}(L_\infty, L_\infty)$ – интегральный оператор (ядро – функция Грина)

$$A[z](t) = \int_0^{t^{n+1}} d\eta^{n+1} \int_Q G\,(t;\eta)\, z(\eta) d\widehat{\eta}$$

Замена (3) **приводит УНКЗ** (1) **к эквивалентному ур.** $(\star)$ **над** L_∞ :

$$z(t) = g\big(t, \Theta[w](t) + A[z](t), v(t)\big), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_\infty(\Pi), \tag{4}$$

$$A \in V(T), \quad T = \Big\{H : \; H = Q \times [0, \tau], \; 0 \le \tau \le \sigma\Big\}.$$

УНКЗ на $\Pi \subset \mathbf{R}^n$

$v \in \mathcal{D}$ – управления
$y \in W(\Pi)$ – решения

$$\Omega \equiv \left\{ v \in \mathcal{D} : \ v \rightsquigarrow \text{единств. решение } y_v \in W(\Pi) \right\}$$

$$v_0 \in \Omega, \quad v_0 + \delta v \in \mathcal{D} \xrightarrow{?} v_0 + \delta v \in \Omega$$

История вопроса и обзоры:

Сумин В.И. Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестник ННГУ. Математика. 2003. Вып.1.

Sumin V. Volterra Functional-Operator Equations in the Theory of Optimal Control of Distributed Systems // IFAC PapersOnLine. 2018. V. 51, iss. 32.

Сумин В.И. Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений//Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Т.25, 1.

При получении НУО обычно:

- либо ① считают $\Omega = \mathcal{D}$;
- либо ② изучают УСГР на специальных вариациях;
- либо ③(при недостатке информации об УСГР) считают УНКЗ **сингулярной в смысле Ж.-Л. Лионса [Л]** и переходят от классического случая

  «управление $\to$ состояние»

  к рассмотрению оптимизационной задачи в классе пар

  «управление, состояние»

  (В этом случае в [Л] для вывода

  НУО $\equiv$ «сингулярных систем оптимальности»

  применяется метод адаптированного штрафа).

[Л] Ж.-Л. Лионс. Управление сингулярными распределенными системами. М., 1987.

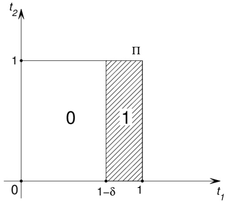
4. Проблема УСГР. Пример неустойчивости

$$\left.\begin{array}{l} x''_{t^1t^2} = v(t)(x'_{t^1})^2, \quad t \in \Pi \equiv [0,1] \times [0,1], \\ x(t^1,0) = t^1,\ 0 \le t^1 \le 1;\ x(0,t^2) = 0,\ 0 \le t^2 \le 1 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

$$\mathcal{D} = \left\{ v \in L_\infty(\Pi) :\ 0 \le v(t) \le 1,\ t \in \Pi \right\},\ W(\Pi) = AC_\infty(\Pi)$$

$$(v_0 \equiv 0) \in \Omega, \quad x_{v_0} \equiv t^1$$

$$v_\delta = \begin{cases} 0,\ 0 \le t^1 \le 1-\delta \\ 1,\ 1-\delta < t^1 \le 1 \end{cases}$$



$\forall \delta > 0 :\ v_\delta \notin \Omega$, т.к. соотв. п.в.-решение (1) $x_\delta(.) \notin W(\Pi) = AC_\infty(\Pi)$

$$x_\delta(t) = \left\{ t^1,\ t^1 \in [0, 1-\delta];\ (1-\delta) + (1-t^2)^{-1}(t^1 - 1 + \delta),\ t^1 \in (1-\delta, 1] \right\}$$

Дост. усл. УСГР: $(W(\Pi) = AC_\infty(\Pi))$ $\quad \operatorname*{vraisup}_{t\in\Pi} \left| \int_0^{t^2} \left(v\left(t^1,\xi\right) - v_0\left(t^1,\xi\right)\right) d\xi \right|$ малò

5. Теория УСГР ($\star$) над L_∞^m с приложениями к УНКЗ

- **Случай фиксированного оператора A:**

- Сумин В.И.// ДАН СССР. 1989. Т.305. 5;
- Сумин В.И.// ЖВМ и МФ. 1990. Т.30. 1;
- Сумин В.И.// Дифф. уравн. 1990. Т.26. 12;
- Сумин В.И.// Украинский матем. журн., 1991. Т.43. 4.

- **Случай управляемого оператора A:**

- Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 1992.

Случай управляемого A: $\rho(A, v; A_0, v_0) = \rho(v, v_0) + \|A - A_0\|$

Обзор: Сумин В.И., Чернов А.В. Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределенных систем//Тр. конф., посв. 90-летию Н.Н.Красовского (Екатеринбург, 2014).

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \qquad t \in \Pi \subset \mathbf{R}^n, \tag{$\star$}$$

Пусть $v_0 \in \Omega$, $z_0 \equiv z_{v_0}$, где

$$\Omega \equiv \left\{ v \in \mathcal{D} : \text{ для } v \ \exists \text{ единств. в } L_\infty^m \text{ решение } (\star) - z_v \right\};$$

$$\rho(v, v_0) \equiv \|A[\Delta_v f(z_0)]\|_{L_\infty^l}, \ \Delta_v f(z_0) \equiv f(t, A[z_0], v) - f(t, A[z_0], v_0).$$

Теорема УСГР (Сумин В.И.// ДАН СССР. 1989. Т.305. 5)

1) f и $f'_{\mathbf{p}}$: усл. Каратеодори, огранич. на любом огранич. мн-ве;
2) $\mathcal{D}$ ограничено в L_∞^s;
3) $\exists$ мажоранта $B \in \mathcal{L}(L_\infty, L_\infty)$ для A, имеющая $\forall\ \delta > 0$ вольтеррову δ-цепочку.

Тогда $\exists\ \varepsilon > 0$ и $C > 0$:

$$\left\{ v \in \mathcal{D}, \quad \rho(v, v_0) < \varepsilon \right\} \Rightarrow \{v \in \Omega\}, \ \|A[z_v - z_0]\|_{L_\infty^l} \le C \cdot \rho(v, v_0).$$

6. Теория УСГР уравнений $(\star)$ над L_p^m

Схема док-ва теорем УСГР для уравнений $(\star)$**:**
($\exists$ лок. реш. на $H \in T$) $\Rightarrow$ (Оценка разности решений) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ (Продолжение решения по вольтерровой цепочке)

Уравнения $(\star)$ **в пространствах** L_p^m **с приложениями к УНКЗ**:

- Сумин В.И. // Вестник ННГУ. ММ и ОУ. 1998. Вып.2(19).
- Сумин В.И. // Вестник ННГУ. Математика. 2003. Вып.1.
- Лисаченко И.В., Сумин В.И. // Дифф. уравн. 2011. Т.47. №6.
- Сумин В.И. // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т.25. №132.

Переход от случая L_∞^m к случаю L_p^m, $1 \leq p < \infty$, нетривиален: потребовалось ввести новое понятие **«равностепенная квазинильпотентность семейства операторов»**.

Обзор в статье: Сумин В.И. // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Т.25, №1.

Модельный пример [Л]:

$$\left.\begin{array}{ll} y_t' - \Delta y = y^3 + v(x,t), & (x,t) \in \Pi \equiv Q \times [0,\sigma],\ Q \subset \mathbf{R}^n \\ y(x,0) = w(x),\ x \in Q; & y\Big|_{x \in \partial Q} = 0,\ 0 \le t \le \sigma \end{array}\right\} \qquad (1)$$

$v \in \mathcal{D} \subset L_2$ — управление $\quad$ ($\mathcal{D}$ – выпукло); $\qquad w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$.

Решение (1) в смысле $W_2^{2,1}(\Pi) \subset L_6(\Pi)$.

Задача оптимального управления для (1) ($\overline{y} \in L_6$ задано):

$$F[y,v] \equiv \|y - \overline{y}\|_{L_6}^6 + \|v\|_{L_2}^2 \to \min, \quad (1), \quad y \in L_6, \quad v \in \mathcal{D}. \qquad (2)$$

[Л] Ж.-Л. Лионс. Управление сингулярными распределенными системами. М., 1987.

Вывод НУО для (2) методом адаптированного штрафа [Л]:

Пусть $\{y_0, v_0\}$ – решение (2).
Рассматриваем (2) на парах $\{y, v\} \in L_6 \times \mathcal{D}$.

Шаг 1: Заменяем (2) на

$$\left.\begin{array}{r} F_\varepsilon[y,v] \equiv F[y,v] + \varepsilon^{-1}\|y'_t - \Delta y - y^3 - v\|^2_{L_2} + \\ +\|v - v_0\|^2_{L_2} + \|y - y_0\|^2_{L_2} \to \min,\ v \in \mathcal{D},\ y \in L_6. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Шаг 2: Выводим НУО для (3) (ε фиксировано) методом классического варьирования.

Шаг 3: Переходим к пределу:

$$(\text{НУО для } (3)) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} (\text{НУО для } (2)).$$

(НУО для (2)) $=$ (интегральный принцип максимума) $\equiv$
$\equiv$ («сингулярная система оптимальности» по терминологии [Л]).

- [Сумин В.И. // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. Вып.2(21); 2002. Вып.1(25)]:

В силу теоремы единственности для (1) задача (2) $\sim$

$$J[v] \equiv F[y_v, v] \to \min, \quad v \in \Omega, \tag{4}$$

где $\Omega \subset \mathcal{D}$ – множество глобальной разрешимости для (1),
y_v – решение (1), отвечающее управлению $v \in \Omega$.

Из теоремы УСГР для (1), полученной с помощью ур. $(\star)$, следует, что $\Omega = \overset{\circ}{\Omega}$, т.е. Ω выдерживает классическое варьирование.

Методом классического варьирования управления получаем (НУО для (4)) $\equiv$ («сингулярная система оптимальности» [Л] для (2))

Аналогично были решены задачи получения «сингулярных НУО» [Л, гл.1, § 16], [Л, гл.1, § 20, задача 9], [Л, гл.1, § 20, задача 11], отмеченные в [Л] как «представляющие интерес».

9. Особые управления (ОсУ). Задача оптимизации

$$z(t) = f\left(t, A[z](t), v(t)\right), \quad t \in \Pi \qquad (\star)$$

Пусть:

- выполнены условия сформулир. выше теоремы УСГР;
- $f''_{\mathbf{pp}}$ – усл. Каратеодори и ограничена на любом огранич. мн-ве;
- $F : L_1^m \to \mathbf{R}$ — функционал, дважды непр. диффер. по Фреше;
- $D \equiv \{v \in L_\infty^s : v(t) \in U, t \in \Pi\}$ – класс допустимых управлений, $U \subset \mathbf{R}^s$ ограничено.

Рассмотрим задачу оптимизации

$$J[v] \equiv F[z_v] \to \max, \quad v \in \Omega, \qquad (1)$$

понимая ее как задачу нахождения L_1^s-локального максимума.

Пусть: v_0 – оптимальное управление, $z_0 = z_{v_0}$ – соотв. реш. $(\star)$.

9. Поточечный принцип максимума (ППМ)

Формулой

$$S[z](t) \equiv z(t) - f'_{\mathbf{p}}(t) A[z](t), \ \ z \in L_1^m, \ \ t \in \Pi,$$

где $f'_{\mathbf{p}}(t) \equiv f'_{\mathbf{p}}(t, A[z_0](t), v_0(t))$, определен оператор $S \in \mathfrak{L}(L_1^m, L_1^m)$.

Пусть $\omega \in L_\infty^m$ — функция Рисса функционала (производной Фреше) $F'(z_0) \in (L_1^m)^*$. Уравнение

$$S^*[\psi] = \omega, \tag{2}$$

где $S^* \in \mathfrak{L}(L_\infty^m, L_\infty^m)$ — сопряженный к S оператор, имеет единственное в L_∞^m решение ψ.

Положим

$$\pi(t, \mathbf{w}) \equiv \langle \psi(t), \Delta_{\mathbf{w}} f(t) \rangle_m, \ \ t \in \Pi, \quad \mathbf{w} \in U,$$
$$\Delta_{\mathbf{w}} f(t) \equiv f(t, A[z_0](t), \mathbf{w}) - f(t, A[z_0](t), v_0(t))$$

Принцип максимума:

$$\mathcal{M} \equiv \{\{t, \mathbf{w}\} \in \Pi \times U \ : \ \pi(t, \mathbf{w}) = 0\}\,.$$

$$\mathcal{M}(t) \equiv \{\mathbf{w} \in U \ : \ \{t, \mathbf{w}\} \in \mathcal{M}\}$$

Определение: Управление v_0 называется ОсУ ППМ, если

$$\mathrm{mes}\ \{t \in \Pi \ : \ \mathcal{M}(t) \neq \{v_0(t)\}\} > 0.$$

Терминология:
ППМ вырождается на ОсУ v_0,
ОсУ — *вырожденное управление ППМ*,
ОсУ — *вырожденное управление для способа простейшего одноточечного игольчатого варьирования*.
$\Pi_* \equiv \{t \in \Pi \ : \ \mathcal{M}(t) \neq \{v_0(t)\}\}$ — **мн-во вырождения ППМ** на v_0.
Полное вырождение ППМ:
$\mathrm{mes}\,\Pi_* = \mathrm{mes}\,\Pi, \quad \mathcal{M}(t) = U$ при $t \in \Pi_*$

9. Простейшая одноточечная игольчатая варианта

Пусть:
Σ — совокупность всех наборов $\sigma \equiv \{\tau, \mathbf{w}\}$, в каждом из которых $\mathbf{w} \in U$, $\tau \in \Pi$ — некоторая правильная точка Лебега функции $\pi(\cdot, \mathbf{w})$;
$\mathcal{H}$ — семейство всех пар $h \equiv \{\sigma, \varepsilon\}$ таких, что $\sigma \equiv \{\tau, \mathbf{w}\} \in \Sigma$, $\varepsilon > 0$ — такое, что множество $\Pi_\varepsilon(\tau) \equiv \tau - \varepsilon[0,1]^n$ принадлежит Π.

Каждой паре $h \equiv \{\sigma, \varepsilon\} \in \mathcal{H}$ отвечает допустимое управление

$$v_h(t) \equiv \{\mathbf{w},\ t \in \Pi_\varepsilon(\tau); \qquad v_0(t),\ t \in \Pi \setminus \Pi_\varepsilon(\tau)\},$$

а каждому набору *параметров варьирования* $\sigma \equiv \{\tau, \mathbf{w}\} \in \Sigma$ отвечает семейство функций

$$\{v_h(\cdot)\}_{h \equiv \{\sigma,\varepsilon\} \in \mathcal{H}}$$

— **простейшая одноточечная игольчатая варианта (ПОИВ)** управления v_0.

Пусть v_0 — ОсУ для ППМ и имеет место полное вырождение.

Предел (если он существует при некотором $\gamma > n$)

$$\delta^{\gamma-n+1} J(\sigma) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\gamma} \left(J[v_h] - J[v_0] \right),$$

– вариация порядка $\gamma - n + 1$ функ-ла J на ПОИВ $\{v_h(\cdot)\}_{h\equiv\{\sigma,\varepsilon\}\in\mathcal{H}}$;

$\delta^{\gamma-n+1} J(\sigma) \le 0$ $(\sigma \in \Sigma)$ — НУО порядка $\gamma - n + 1$ управления v_0.

Типично:
если $\delta J(\sigma) \equiv 0$, $\sigma \in \Sigma$, то и $\delta^{\gamma-n+1} J(\sigma) \equiv 0$, $\sigma \in \Sigma$, $n < \gamma < n + 1$
и содержательны, вообще говоря, лишь НУО, начиная с порядка 2.

Поэтому назовем ОсУ v_0 **сильно вырожденным для способа простейшего одноточечного игольчатого варьирования** $\{v_h : \sigma \in \Sigma\}$, если тождественно зануляется вариация 2-го порядка:

$$\delta^2 J(\sigma) \equiv 0, \quad \sigma \in \Sigma$$

9. Достаточные условия сильного вырождения

Теорема [Сумин В.И. // ДАН СССР. 1991. Т.320. 2]

Если v_0 — *ОсУ для ППМ и имеет место один из следующих случаев:*

i) $\psi(t) \equiv 0,\ t \in \Pi$;

ii) $A[L_1^m] \subset L_\infty^l$;

iii) $f(t, A[z], v) = f_1(t, A_1[z])A_2[z] + f_2(t, A_1[z], v)$,
$A[\cdot] = \{A_1[\cdot], A_2[\cdot]\}$,
$A_i[\cdot] : L_1^m \to L_1^{l_i}\ (i = 1, 2), \quad l_1 + l_2 = l$,
$A_1[L_1^m] \subset L_\infty^{l_1}$,
f_1 – $(m \times l_2)$-*матрица*,

то из НУО, полученных для v_0 *с помощью ПОИВ,*
вырождаются все условия до порядка n *включительно, и*
содержательными могут быть лишь НУО порядка, большего n;
таким образом, в случае $n > 1$ *ОсУ* v_0 *будет сильно вырожденным.*

Обозначим

$$f''_{\mathbf{pp}}(\cdot)[x,y] \equiv \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} f''_{\mathbf{p}^i\mathbf{p}^j}(\cdot)x^i y^j, \;\; x,y \in \mathbf{R}^l;$$

$$\Gamma \equiv \left\{ \{i,j\} : \;\; i \in \overline{1,m}, \;\; j \in \overline{1,l}; \;\; \Delta_{\mathbf{w}} f^{i'}{}_{\mathbf{p}^j}(t) = 0 \;\forall \mathbf{w} \in U \text{ при п.в. } t \in \Pi \right\};$$

если $X = (X_{ij})$ — $(m \times l)$-матрица, то $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_{ij})$ — $(m \times l)$-матрица, в которой

$$\widetilde{X}_{ij} \equiv \{0, \;\; \{i,j\} \in \Gamma; \;\; X_{ij}, \;\; \{i,j\} \notin \Gamma\},$$

X^0 — ml-столбец, полученный развертыванием матрицы X по правилу

$$X^0 \equiv col\,\{X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{m1}, X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{ml}\},$$

а $M[\cdot]$ — обратный оператор свертывания ml-столбца в $(m \times l)$-матрицу.

9. Ядра билинейных функционалов

Любой ограниченный билинейный над $L_1^m \times L_1^k$ функционал $b[\cdot,\cdot]$ единственным образом представим в виде $(\Theta \in L_\infty^{m\times k}(\Pi \times \Pi))$

$$b[x,y] = \int_\Pi dt \int_\Pi x^*(t)\Theta(t,s)y(s)ds, \quad x \in L_1^m, \quad y \in L_1^k. \tag{3}$$

Пусть: $b_0[x,y] \equiv 2^{-1} \cdot F''(z_0)[x,y]$, $x,y \in L_1^m$, где
$F''(z_0)[\cdot,\cdot]$ — билинейный функционал второй производной Фреше;

$\Theta_0(t,s)$ и $\Theta_1(t,s)$ — $(m\times m)$-матрицы, отвечающие по формуле (3) функционалам b_0 и

$$b_1[x,y] \equiv 2^{-1} \int_\Pi \left\langle \psi(t), f''_{\mathbf{pp}}(t, A[z_0](t), v(t))[A[x](t), A[y](t)] \right\rangle_m dt;$$

$\Theta_2(t,s)$ — $(m \times ml)$-матрица, отвечающая функционалу

$$b_2[x,y] \equiv \int_\Pi \left\langle \psi(t)\ ,\ \widetilde{M[y(t)]}A[x](t) \right\rangle_m dt,\ x \in L_1^m,\ y \in L_1^{ml}.$$

9. «Бисопряженные» уравнения

Пусть:
I_k — тождественный оператор в L_1^k;
$L_1^m \otimes L_1^k$ — проективное тензорное произведение L_1^m и L_1^k, натянутое на элементы $x(t) \otimes y(s) \equiv x(t)y^*(s)$ $(x \in L_1^m,\ y \in L_1^k)$ и совпадающее с $L_1^{m\times k}(\Pi \times \Pi)$.

Рассматриваемое над $L_\infty^{m\times m}(\Pi \times \Pi)$ уравнение

$$(S \otimes S)^*[\eta(t,s)] = \Theta_i(t,s) \tag{4}$$

имеет единственное решение $\eta_i(t,s)$ $(i = 0, 1)$.

Уравнение

$$(S \otimes I_{ml})^*[\eta(t,s)] = \Theta_2(t,s) \tag{5}$$

имеет единственное в $L_\infty^{m\times ml}(\Pi \times \Pi)$ решение $\eta_2(t,s)$.

9. НУО сильно вырожденных ОсУ

Для $t, s \in \Pi$, $u, v \in U$ положим

$$E(t, s; u, v) \equiv$$

$$\equiv \left\langle \Delta_u g(t), \{\eta_0(t,s) + \eta_1(t,s)\} \Delta_v g(s) + \eta_2(t,s) \left\{\Delta_v g'_{\mathbf{p}}(s)\right\}^0 \right\rangle_m,$$

где $\{\Delta_v g'_{\mathbf{p}}(s)\}^0$ — ml-столбец, полученный развертыванием по правилу «столбец за столбцом» $(m \times l)$-матрицы $\Delta_v g'_{\mathbf{p}}(s)$.

Теорема [Сумин В.И. // ДАН СССР. 1991. Т.320. 2]

Если сильно вырожденное ОсУ ППМ v_0 *оптимально, то* $E(\tau, \tau; \mathbf{w}, \mathbf{w}) \leq 0$ *при любом* $\mathbf{w} \in \mathcal{M}(\tau)$ *для почти всех* $\tau \in \Pi$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ